Primer Parcial Abril Julio 2012 Miguel Guzman Tipo A

Pregunta (1)

Sea el sistema de ecuaciones,se escribe la matriz asociada

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Buscamos la matriz de los cofactores para buscar la adjunta

$$a_{11} := \left|\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| \quad a_{12} := -\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| \quad a_{13} := \left|\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right| \quad a_{21} := -\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| \quad a_{22} := \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| \quad a_{23} := -\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right|$$

$$a_{31} := \left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right| \quad a_{32} := -\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right| \quad a_{33} := \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right|$$

$$B := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad AdjA := B^T \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para buscar la inversa podemos utilizar el teorema $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot AdjA$

Donde el determinante de A es $|A| \rightarrow 2$

Por lo que

$$A^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Con este resultado, sabemos que la respuesta al sistema, Solucion Unica Porque? sera

$$x := A^{-1} \cdot b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pregunta (2)

Ya el sistema se puede analizar, sin embargo puede realizar una operacion previa

$$R_2 = R_2 - 3R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3\alpha - 3 & \beta - 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \alpha & 3 + \beta \end{pmatrix}$$

Sistema tendra infinitas soluciones si

$\alpha := 1$ y $\beta := -3$

Tendra solucion Unica $\alpha \neq 1$

Sera Inconsistente $\alpha := 1$ $\beta \neq 3$

Para el caso solucion infinita se debe buscar las soluciones, entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3\alpha - 3 & \beta - 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \alpha & 3 + \beta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la segunda ecuacion

$x_3 := 3$

De la tercera

$x_2 := 2 + 2x_3 - 2x_4 \rightarrow 8 - 2 \cdot x_4$

De la primera $x_1 := 2 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 \rightarrow 12 - 5 \cdot x_4$

De manera que el vector solucion sera

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 12 - 5 \cdot x_4 \\ 8 - 2 \cdot x_4 \\ 3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

implica

$$X = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta (3)

$$\left| \begin{pmatrix} a1 & a1 & a1 & a1 \\ a1 & b1 & b1 & b1 \\ a1 & b1 & c1 & c1 \\ a1 & b1 & c1 & d1 \end{pmatrix} \right| \text{ simplify } \rightarrow -a1 \cdot (a1 - b1) \cdot (b1 - c1) \cdot (c1 - d1)$$

Para realizar el ejercicio con mayor facilidad se hacia reduccion Gauss, de manera que quede una matriz triangular superior.

$R_2 = R_2 - R_1$ $R_3 = R_3 - R_1$ $R_4 = R_4 - R_1$

$$\begin{pmatrix} a1 & a1 & a1 & a1 \\ 0 & b1 - a1 & b1 - a1 & b1 - a1 \\ 0 & b1 - a1 & c1 - a1 & c1 - a1 \\ 0 & b1 - a1 & c1 - a1 & d1 - a1 \end{pmatrix}$$

$R_3 = R_3 - R_2$ $R_4 = R_4 - R_2$

$$\begin{pmatrix} a1 & a1 & a1 & a1 \\ 0 & b1 - a1 & b1 - a1 & b1 - a1 \\ 0 & 0 & c1 - b1 & c1 - b1 \\ 0 & 0 & c1 - b1 & d1 - b1 \end{pmatrix}$$

$R_4 = R_4 - R_3$

$$\begin{pmatrix} a1 & a1 & a1 & a1 \\ 0 & b1 - a1 & b1 - a1 & b1 - a1 \\ 0 & 0 & c1 - b1 & c1 - b1 \\ 0 & 0 & 0 & d1 - c1 \end{pmatrix}$$

se conoce que el determinante de una matriz triangular sera la multiplicacion de la diagonal principal

$$detA := a1 \cdot (b1 - a1)(c1 - b1)(d1 - c1)$$

Pregunta (4)

Tomando determinante a la igualdad se tiene

$detA := 2$ $\quad$ $detB := 3$ $\quad$ se sabe que $\quad$ $detAt := detA$ $\quad$ $detBinv := \dfrac{1}{detB}$

$$detC := 3^4 \cdot detAt \cdot (detBinv)^2 \cdot (detA)^2 \rightarrow 72$$